Resumen de teoría elemental de conjuntos (primera parte)

Javier Castro Albano

1. Conjuntos, elementos, pertenencia

El término 'conjunto' es un *término primitivo* de la teoría de conjuntos. No se lo define. Podría intentarse una aproximación intuitiva diciendo que los conjuntos son *colecciones de objetos*. Pero esta aproximación intuitiva tiene sus limitaciones: se habla de conjuntos vacíos (o unitarios), pero rara vez aceptaríamos hablar de colecciones vacías (o de un solo objeto); por otro lado, en la teoría de conjuntos se entiende que los conjuntos son, ellos mismos, objetos.

Los conjuntos suelen representarse por letras mayúsculas A, B, C, etc. A los objetos que forman parte de un conjunto A se los llama *elementos* de A. Si el objeto x es un elemento del conjunto A escribimos: $x \in A$ y decimos que *x pertenece a* A. Si un objeto x ***no*** pertenece a un conjunto A (esto es, no es un elemento de A), escribimos: $x \notin A$. Los conjuntos también son objetos y, por lo tanto, también pueden ser elementos de conjuntos: la oración '$A \in B$' afirma que el conjunto A pertenece a (es un elemento de) el conjunto B.

2. El principio de extensionalidad

No existen dos conjuntos con los mismos elementos. Si A y B tienen los mismos elementos, entonces A=B. Esta característica de los conjuntos suele expresarse por medio del *Principio de extensionalidad de conjuntos:* si para todo objeto x, $x \in A$ si y solo si $x \in B$, entonces A=B. Esto significa que los conjuntos están completamente determinados por sus elementos.

Puesto que los conjuntos están completamente determinados por sus elementos, podemos definir un conjunto A especificando exactamente cuáles son sus elementos. Esto puede hacerse de dos maneras:

(i)Por *extensión*, A={2,4,6}, listando los elementos del conjunto

(ii)Por *comprensión*, mencionando una propiedad que instancian exactamente los elementos del conjunto: $A=\{x|x$ es un número natural par y x es menor que 7} (léase: A es el conjunto de todos los objetos x tales que x es un número natural par menor que 7). En general, si P es una propiedad, la expresión '$\{x|Px\}$' significa 'el conjunto de todos los objetos x tales que x instancia la propiedad P' o, más brevemente, 'el conjunto de todos los objetos x que son P'. La tesis central vinculada con las definiciones por compresiones es la siguiente: para todo objeto a, $a \in \{x|Px\}$ si y solo si a es P.

Dado el principio de extensionalidad, se sigue que $\{2,4,6\} = \{x|x$ es un número natural par y x es menor que $7\}$. También $\{2,4,6\} = \{2,2,4,6\} = \{2,6,4\}$, porque según el principio de extensionalidad los conjuntos están completamente determinados por sus elementos; el orden en el cual los listamos no afectan al conjunto que estamos definiendo; la repetición de alguno de ellos en la lista tampoco se toma en cuenta.

También propiedades que son instanciadas por los mismos objetos determinan el mismo conjunto. La propiedad *ser un número natural mayor que 10 y menor que 12* y la propiedad *ser el número de personas que integran un equipo de fútbol* determinan el mismo conjunto: $\{x|x$ es un número natural mayor que 10 y menor que $12\} = \{x|\ x$ es el número de personas que integran un equipo de futbol$\}$ $= \{11\}$.

Si un conjunto puede definirse por extensión, entonces también puede definirse por comprensión, por medio de una propiedad disyuntiva: el conjunto $\{a, b, c\}$, por ejemplo, es idéntico a $\{x|x=a$ o $x=b$ o $x=c\}$. Pero no todos los conjuntos definibles por comprensión admiten una definición por extensión: no pueden listarse los elementos de un conjunto infinito.

3. Propiedades y conjuntos

Lo habitual es pensar que los conjuntos son *objetos abstractos*, como las propiedades. Pero el principio de extensionalidad distingue a los conjuntos de las propiedades. Las propiedades *ser un número natural mayor que 10 y menor que 12* y *ser el número de personas que integran un equipo de fútbol* son propiedades distintas, aunque sean instanciadas por los mismos objetos. Sin embargo, ambas determinan el mismo conjunto. Las propiedades no cumplen el principio de extensionalidad. Propiedades y conjuntos son entidades abstractas con diferentes criterios de identidad.

4. Existencia de conjuntos: el conjunto vacío

Un conjunto se llama vacío si y solo si carece de elementos. En la teoría de conjuntos se admite la existencia de un conjunto vacío. Pero, por el principio de extensionalidad, solo puede existir solamente un conjunto vacío (si A y B son vacíos, entonces A = B; los conjuntos se distinguen por sus elementos, por lo tanto, si A y B no tienen elementos no pueden distinguirse). Al conjunto vacío se lo denota con el símbolo ‘$\varnothing$’. De todo lo dicho se sigue que para todo objeto x, $x \notin \varnothing$. Puesto que todo objeto es idéntico a sí mismo, podemos identificar a $\varnothing$ como el conjunto de todos los objetos que instancian la propiedad *no ser idéntico a sí mismo*: $\varnothing = \{x|x \neq x\}$.

5. Existencia de conjuntos: conjuntos unitarios y pares (no ordenados)

Un conjunto unitario (por ejemplo {Sócrates}) es un conjunto que tiene solamente un elemento. No hay que confundir el conjunto unitario {Sócrates} con el objeto Sócrates. En este caso, Sócrates es una entidad concreta (lo habitual es pensar que ocupa un lugar en el espacio y en el tiempo); los conjuntos, en cambio, suelen ser considerados entidades abstractas. Dado un objeto a, la teoría de conjuntos reconoce la existencia del conjunto $\{a\} = \{x|x=a\}$.

Los conjuntos son objetos y, por lo tanto, también pueden ser elementos de conjuntos. Por ejemplo, además de $\varnothing$, existe $\{\varnothing\} = \{x|x=\varnothing\}$. $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$ son ambos conjuntos (y, por lo tanto, son ambos entidades abstractas), pero no deben ser confundidos: el primero es un conjunto sin elementos, el segundo es un conjunto unitario.

Un par (por ejemplo {1,2} o {2,3}) es un conjunto que tiene dos elementos. Por el principio de extensionalidad, {1,2} = {2,1}. Los pares de los que estamos hablando aquí son pares no ordenados (más adelante introduciremos los pares ordenados). Dados dos objetos a y b, la teoría de conjuntos reconoce la existencia del conjunto $\{a,b\} = \{x|x=a \text{ o } x=b\}$.

6. Existencia de conjuntos: el principio de comprensión.

Hemos visto que las propiedades no se confunden con los conjuntos; sin embargo, parece haber cierta relación entre ambos. La posibilidad de definir por comprensión un conjunto sugiere que al menos algunas propiedades determinan conjuntos; esto es, que hay propiedades P tales que existe un conjunto cuyos elementos son exactamente aquellos objetos que instancian la propiedad P. Por ejemplo: la propiedad *no ser idéntico a sí mismo* o la propiedad *ser idéntico a* $\varnothing$, ya hemos visto, determinan conjuntos. ¿Podría asumirse como un principio de la teoría de conjuntos la tesis de que ***todas*** las propiedades determinan conjuntos? La tesis de que todas las propiedades determinan conjuntos se conoce como "Principio de Comprensión".

Bertrand Russell mostró que en este ámbito hay que moverse con mucho cuidado. Supongamos que toda propiedad determina un conjunto. Entonces debe haber un conjunto R determinado por la propiedad *no pertenecer a sí mismo*: $R = \{x|x\notin x\}$. De esta identidad se sigue que R instancia una propiedad si y solo si $\{x|x\notin x\}$ también la instancia; en particular, que $R\in R$ si y solo si $R\in\{x|x\notin x\}$. Pero, como vimos al definir la notación $\{x|Px\}$, $a\in\{x|Px\}$ si y solo si a es P; en particular, $R\in\{x|x\notin x\}$ si y solo si $R\notin R$. Finalmente, por la transitividad del bicondicional, de '$R\in R$ si y solo si $R \in \{x | x \notin x\}$' y '$R \in \{x | x \notin x\}$ si y solo si $R \notin R$' se sigue que $R \in R$ si y solo si $R \notin R$, lo que es una contradicción en lógica clásica. La derivación de la contradicción es la siguiente:

1. $R = \{x | x \notin x\}$
2. $R \in R$ si y solo si $R \in \{x | x \notin x\}$
3. $R \in \{x | x \notin x\}$ si y solo si $R \notin R$
4. $R \in R$ si y solo si $R \notin R$

Esta contradicción, que se conoce como la *Paradoja de Russell*, sugiere que la conexión entre propiedades y conjuntos debe tratarse con cuidado. Tres caminos se han ofrecido para evitar este resultado. El primero es abandonar la lógica clásica, que es un componente crucial en la derivación de la paradoja; el segundo es mantener el principio de comprensión y la lógica clásica, pero desarrollar una teoría de las propiedades que, de algún modo, muestre que la propiedad *no pertenecerse a sí mismo*, no existe (y que tampoco existen otras propiedades que provocarían paradojas similares). Pero la mayor parte de los matemáticos hoy en día prefieren conservar tanto la lógica clásica como la existencia de la propiedad *no pertenecerse a sí mismo* y rechazan el principio de comprensión.

El principio de comprensión nos ofrece una buena respuesta a la pregunta ¿qué conjuntos existen? La idea es que aquellos objetos que instancian una determinada propiedad pueden ser vistos como formando un conjunto. Abandonado el principio de comprensión, el problema de especificar que conjuntos existen se hace especialmente urgente. Las *teorías axiomáticas de conjuntos* ofrecen distintas soluciones para este problema.

La teoría axiomática más frecuentemente usada, la de Zermelo-Fraenkel (ZF), acepta la existencia del conjunto vacío, la de los conjuntos unitarios y la de los pares (no ordenados) de objetos; por supuesto, rechaza la existencia de un conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos.

7. Subconjuntos

A es un *subconjunto* de B si y solo si todo elemento de A es también un elemento de B (también decimos que A está incluido en B). En símbolos: $A \subseteq B$. Por lo tanto, $A \subseteq B$ si y solo si para todo objeto x, $x \in A$ si y solo si $x \in B$.

Nótese que Para todo conjunto C, $C \subseteq C$; y, por el principio de extensionalidad, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$. También por el principio de extensionalidad, para todo conjunto C, $\varnothing \subseteq C$.

A es un *subconjunto propio* de B si y solo si $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

Tenemos ahora una definición que nos permite saber, dados dos conjuntos A y B, cuando A es un subconjunto de B. Pero dado un conjunto A, todavía no sabemos qué subconjuntos de A (aparte de $\varnothing$) existen. El *axioma de separación* nos permite avanzar en la solución de ese problema: dado un conjunto A y una propiedad P, existe el conjunto de todos los elementos de A que instancian P. Esto es, dado un conjunto A y una propiedad P, existe $\{x| x \in A \text{ y } Px\}$. Nótese que $\{x| x \in A \text{ y } Px\} \subseteq A$.

8. El conjunto universal

Sabemos que la propiedad *no ser idéntico a sí mismo* determina el conjunto $\varnothing = \{x|x \neq x\}$. ¿Pero qué hay de la propiedad *ser idéntico a sí mismo*? Todo objeto es idéntico a sí mismo, de allí que si existiera ese conjunto, sería un conjunto cuyos elementos serían todos los objetos. A menudo se refiere a este conjunto como el ***conjunto universal***: $U=\{x|x=x\}$. ¿Existe U?

Del axioma de separación se sigue que el conjunto U no puede existir. Supongamos que U existe. Entonces por el axioma de separación, se sigue que cualquier propiedad determina un subconjunto de U. En particular, la propiedad de Russell, *no pertenecer a sí mismo*, determina el subconjunto $\{x| x \in U \text{ y } x \notin x\}$. Pero puesto que todo objeto pertenece a U, $\{x| x \in U \text{ y } x \notin x\} = \{x|x \notin x\} = R$. Y si R existe, la paradoja de Russell vuelve a aparecer.

Ninguna teoría de conjuntos que acepte el axioma de separación puede admitir la existencia del conjunto universal. Sin embargo, a menudo todos los objetos sobre los que estamos hablando pertenecen a un conjunto determinado (hablamos sobre el conjunto N de los números naturales o sobre el conjunto de los seres humanos, etc.). En ese caso, el conjunto de los objetos sobre los que hablamos suele llamarse el ***universo de discurso*** (o el ***dominio de discurso***) y también se lo denota con el símbolo U.

9. Algunas operaciones entre conjuntos

La suma y la resta son operaciones entre números. Existen también operaciones entre conjuntos. El resultado de una operación entre conjuntos es también un conjunto.

La *unión* de A y B ($A \cup B$) es el conjunto de los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B: $A \cup B = \{x|x \in A \text{ o } x \in B\}$.

La *intersección* de A y B (A_B) es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B: A_B = {x|x∈A y x∈B}.

El *complemento* de A (A^C) es el conjunto de los elementos del universo del discurso que no pertenecen a A: A^C = {x|x∈U y x∉B}.

Ejemplos: sean A = {0, 1, 2, 3} y B = {1, 2, 4}. A∪B = {x|x∈A o x∈B} = {0, 1, 2, 3, 4}, A_B = {x|x∈A y x∈B} = {1, 2}. Y si U=N, entonces A^C = {x|x∈U y x∉B} = {*x* |*x*∈N y *x*>3}.

10. Algebra de conjuntos

Sea U el universo del discurso y A, B y C tres conjuntos tales que A⊆U, B⊆U y C⊆U. Entonces las siguientes leyes son válidas:

- A_A = A
- A∪A = A
- A_∅ = ∅
- A∪∅ = A
- A_U = A
- A∪U = U
- A_B = B_A
- A∪B = B∪A
- (A_B)_C = A_(B_C)
- (A∪B)∪C = A∪(B∪C)
- A_(B∪C) = (A_B) ∪ (A_C)
- A∪(B_C) = (A∪B) _ (A∪C)