LA SEMÁNTICA DE LA LÓGICA DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN
GAMUT 3.5 - 3.6.2 , 3.6.4, 4.1 - 4.2

En esta clase vamos a ver la semántica de L (el lenguaje de la lógica de predicados de primer orden). Lo haremos en dos pasos:

I. Vamos a definir formalmente en qué consiste dar significado a las expresiones de L, esto es, interpretar cada una de las variables lógicas de L ($a_1, a_2, a_3, \ldots, A_1, A_2, A_3$).

II. Definiremos, mediante cláusulas análogas a las ofrecidas para la semántica de la lógica proposicional, cuándo, bajo una interpretación dada, una fórmula cerrada (oración) de L es **verdadera** y cuándo no. Al igual que en lógica proposicional, el significado de una fórmula será su valor de verdad. Por ende, una vez que hayamos dado significado a las partes componentes de las oraciones de L ($a_1, a_2, a_3, \ldots, A_1, A_2, A_3$), el conjunto de cláusulas a especificar aquí nos dirá cómo el significado de las últimas depende del de las primeras, cómo las condiciones de verdad de una fórmula dependen del significado de sus partes componentes.

Conjuntos

Para realizar estos dos pasos nos valdremos de objetos matemáticos llamados "**conjuntos**". Un conjunto es *un objeto* que reúne en sí otros objetos, sus "**elementos**" (como caso límite tenemos al "conjunto vacío", que simbolizamos mediante la letra ϕ, y que es el único conjunto que no tiene elementos). Decimos que los elementos de un conjunto le "**pertenecen**". Vamos a utilizar las letras mayúsculas **A**, **B**, **C**,… para nombrar conjuntos. Si **a** es un elemento de **A** entonces escribimos $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$. Si no lo es, escribimos $\mathbf{a} \notin \mathbf{A}$.

Lo único que necesitamos saber para conocer un conjunto es qué objetos le pertenecen. Por ello decimos que los conjuntos son entidades **extensionales**: mismos elementos, mismo conjunto;[1] a diferencia de las propiedades, entidades intensionales: por ejemplo, la propiedad de ser un unicornio y la propiedad de ser un cíclope se aplica a los mismos individuos (a ninguno) y, sin embargo, no son la misma propiedad. En cambio, el conjunto de los unicornios y el de los cíclopes sí es el mismo, el conjunto vacío. Puesto que los conjuntos están completamente determinados por sus elementos, podemos definir un conjunto **A** especificando exactamente cuáles son sus elementos. Esto puede hacerse de dos maneras:

- Por **extensión**, listando los elementos del conjunto: $\mathbf{A} = \{2,4,6\}$.
- Por **comprensión**, mencionando una propiedad que instancian exactamente los elementos del conjunto: $\mathbf{A} = \{x \mid x$ es un número natural par y x es menor que $7\}$ (léase "**A** es el conjunto de todos los objetos x tales que x es un número natural par menor que 7). En general, si P es una propiedad, la expresión '$\{x \mid Px\}$' significa 'el conjunto de todos los objetos x tales que x instancia la propiedad P' o, más brevemente, 'el conjunto de todos los objetos x que son P'. La tesis central vinculada con las definiciones por compresión es la siguiente: para todo objeto a, $a \in \{x \mid Px\}$ si y sólo si a es P.

Luego, de acuerdo con el principio de extensionalidad: $\{1, 2, 8\}=\{2, 1, 8, 8\}$, $\{\neg(A_1x_2), \neg\neg(A_1x_2)\} = \{\neg\neg(A_1x_2), \neg(A_1x_2)\}$, etc.. Notemos que no todo conjunto que admite una definición por comprensión admite una por extensión. Por ejemplo, los conjuntos infinitos

[1] Principio de extensionalidad: Si A y B tienen los mismos elementos, entonces A=B.

pueden definirse mediante una propiedad que cumplan sólo sus elementos, pero éstos no pueden ser listados.

Notemos también que $2 \neq \{2\}$, $\neg(A_1x_2) \neq \{\neg(A_1x_2)\}$, etc., pues los primeros son un número y una fórmula, respectivamente, y los segundos son conjuntos. Si ambos en cada caso fueran conjuntos, para poder ser iguales aún deberían tener los mismos elementos.

Si todos los elementos de un conjunto **A** son también elementos de un conjunto **B**, decimos que **A** está **incluido** en **B**, o que **A** es un **subconjunto** de **B**, y lo expresamos "$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$". Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \{1, 2, 8\}$ y $\mathbf{B} = \{2, 1, 7, 8\}$. Como el conjunto vacío carece de elementos, podemos decir que todos sus elementos pertenecen también a cualquier otro conjunto, *i.e.* el conjunto vacío está incluido en todo conjunto: $\phi \subseteq \mathbf{C}$, donde **C** puede ser reemplazado por cualquier conjunto.

Operaciones entre conjuntos: si **A** y **B** son subconjuntos de un conjunto **D**,

– Intersección: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{ y } x \in \mathbf{B}\}$

– Unión: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{ o } x \in \mathbf{B}\}$

– Complemento: $\mathbf{A}^c = \{x \mid x \in \mathbf{D} \text{ y } x \notin \mathbf{A}\}$

– Potencia: $\wp(\mathbf{A}) = \{x \mid x \subseteq \mathbf{A}\}$

– Producto Cartesiano: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{\langle x, y\rangle \mid x \in \mathbf{A} \text{ y } y \in \mathbf{B}\}$

$\langle x, y\rangle$ debe entenderse como un objeto que contiene a su vez dos objetos en sí, *primero* x, que pertenece a el primer conjunto del producto, y *luego* y, que pertenece al segundo. A este tipo de entidades las denominamos "**pares ordenados**" y, a diferencia de los conjutnos, el orden y las repeticiones son importantes para su identificación. Por ejemplo, sean $\mathbf{D} = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$ y $\mathbf{B} = \{c, d\}$. Luego, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$. Vemos entonces que $\langle a, c\rangle \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ mientras que $\langle c, a\rangle \notin \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, porque sólo pertenecerán a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ aquellos *pares ordenados* cuyo primer elemento esté en **A** y su segundo elemento esté en **B**. Luego, $\langle a, c\rangle \neq \langle c, a\rangle$, mientras que en el caso de los conjuntos: $\{a, c\} = \{c, a\}$.

A partir de este ejemplo sabemos que: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{c\}$, $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{a, b, c, d\}$, $\mathbf{A}^c = \{d, e, f\}$, $\wp(\mathbf{B}) = \{\{c, d\}, \{d\}, \{c\}, \phi\}$ y $\mathbf{B} \times \mathbf{B} = \{\langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$, entre otras cosas.

También será útil hablar, no sólo de pares ordenados o 2-tuplas ordenadas, sino de ternas o 3-tuplas ordenadas, 4-tuplas ordenadas, etc.. Acá vamos a interesarnos particularmente en aquellas *n*-tuplas ordenadas que se forman con los elementos de un mismo conjunto:

– $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \{\langle x, y\rangle \mid x \in \mathbf{A} \text{ y } y \in \mathbf{A}\} = \mathbf{A}^2$

– $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A} = \{\langle x, y, z\rangle \mid x \in \mathbf{A} \text{ y } y \in \mathbf{A} \text{ y } z \in \mathbf{A}\} = \mathbf{A}^3$

…

Siguiendo nuestro ejemplo: $\mathbf{B}^2 = \{\langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$, $\mathbf{B}^3 = \{\langle c, c, c\rangle, \langle c, c, d\rangle, \langle c, d, c\rangle, \langle d, c, c\rangle, \langle c, d, d\rangle, \langle d, d, c\rangle, \langle d, c, d\rangle, \langle d, d, d\rangle, \}$, etc..

La Semántica de la Lógica de Predicados

I. Primero diremos cómo habemos de interpretar las variables lógicas de L (análogo al diccionario pero con más formalidad). Llamaremos "**modelos**" a estas interpretaciones:

DEFINICIÓN DE MODELO (definición 6, Gamut 3.6.2)

Un **modelo** M para el lenguaje L de la lógica de predicados es un par ordenado $\langle \mathbf{D}, I \rangle$, cuyo primer elemento, **D**, es un conjunto *no vacío* (intuitivamente, el dominio de discurso, el conjunto de los individuos de los cuales van a ser nombres las letras de individuo y sobre los cuales van a "ranguear" los cuantificadores) que llamamos "**dominio**", y cuyo segundo elemento, I, es una función llamada "**interpretación**", que asigna elementos del dominio a las letras de individuo de L, subconjuntos del dominio a las letras unarias de predicado, subconjuntos de $\mathbf{D}^2$ a las letras de predicado binarias,…, subconjuntos de $\mathbf{D}^n$ a las letras de predicado n-arias, etc.:

(i) Si c es una letra de individuo de L, entonces $I(\mathrm{c}) \in \mathbf{D}$;

(ii) Si A es una letra de predicado n-aria de L, entonces $I(\mathrm{A}) \subseteq \mathbf{D}^n$.

Veamos un ejemplo: "Juan y María son amigos entre sí y también de todos los alumnos de esta clase."

variables lógicas que vamos a usar: j, m, Axy, Cx [2]

modelo: $\langle \mathbf{D}, I \rangle$, donde:

$\mathbf{D} = \{x \mid x \text{ es una persona}\}$ (podría haber sido diferente)

$I(\mathrm{j})$ = Juan

$I(\mathrm{m})$ = María

$I(\mathrm{A}) = \{\langle x, y \rangle \mid x \text{ es amigo de } y\}$ (notemos que $I(\mathrm{A})$ es un subconjunto de $\mathbf{D}^2$, $I(\mathrm{A}) \subseteq \mathbf{D}^2$)

$I(\mathrm{C}) = \{x \mid x \text{ es un alumno de esta clase}\}$

Éste es el modo que adoptaremos de acá en más para hacer el diccionario: además de haber variado la notación para interpretar letras de individuo, hemos incorporado un nuevo elemento a especificar, el dominio, el conjunto de individuos de los cuales vamos a estar hablando, en principio: el conjunto sobre el cual, intuitivamente, van a *ranguear* nuestros cuantificadores: $\forall x\phi$ y $\exists x\phi$ significan, respectivamente: "todos los elementos <u>del dominio</u> son ϕ" y "existe algún elemento <u>del dominio</u> que es ϕ". También hemos reemplazado la interpretación de las letras de predicado vía lenguaje natural (Cx: x es un alumno de esta clase) por una interpretación extensional: es posible que no nos pongamos de acuerdo con respecto a en qué consiste ser alumno de esta clase (oyentes, gente que no viene más, que se anotó y nunca vino, etc.), pero siempre estaremos de acuerdo con respecto a qué objetos pertenecen a un conjunto.

¿Por qué no utilizar siempre el mismo dominio, a saber, el conjunto que contenga todos los objetos (como lo hicimos cuando trabajábamos intuitivamente)? Las razones pueden ser variadas: comodidad, innecesariedad (si estamos trabajando en aritmética, sólo necesitaremos números en nuestro dominio, no hará falta que aquél contenga, por ejemplo, a todas las personas), etc.. No obstante, existe un límite infranqueable: hemos dicho que los conjuntos son objetos, y que el dominio de discurso es un conjunto. Luego, si quisiéramos tener en nuestro dominio todos los objetos, éste debería tener dentro de sí a todos los conjuntos, entre otras cosas, lo cual implicaría la existencia del "conjunto universal", conjunto de todos los conjuntos, y esto lleva a paradojas (la paradoja de Russell es la más conocida, pero hay otras). Luego, nuestro dominio no puede contener a todos los objetos, siempre deberá dejar algunos afuera.

[2] No vamos a interpretar todas las variables lógicas del lenguaje, aunque según la definición de modelo deberíamos, del mismo modo en que no otorgábamos valor de verdad a cada una de las letras proposicionales sino sólo a aquellas que aparecían en nuestras fórmulas: no es necesario.

II. Habiendo establecido en qué consiste dar significado a las variables lógicas de L, a las partes componentes de las oraciones de L ($a_1, a_2, a_3,\ldots, A_1, A_2, A_3$), las siguientes cláusulas nos dirán cuándo estas oraciones son verdaderas y cuándo son falsas:

DEFINICIÓN DE VALUACIÓN BASADA EN UN MODELO (definición 7, Gamut 3.6.2)

Si M es un modelo para L tal que $M = \langle \mathbf{D}, I\rangle$, entonces V_M, la **valuación V basada en M**, se define así:

(i) Si $Aa_1,\ldots,a_n$ es una oración atómica de L, entonces $V_M(Aa_1,\ldots,a_n)=1$ si y sólo si $\langle I(a_1),\ldots,I(a_n)\rangle \in I(A)$.

En el lenguaje natural: $Aa_1,\ldots,a_n$ es verdadera en M si y sólo si la *n*-tupla ordenada formada por los individuos de los cuales son nombres $a_1,\ldots,a_n$ está en la interpretación de A.

En nuestro ejemplo, $V_M(Ajm)=1$, Ajm será verdadera en M, siempre y cuando $\langle I(j), I(m)\rangle \in I(A)$, esto es, $\langle$Juan, María$\rangle \in \{\langle x, y\rangle \mid x$ es amigo de $y\}$, que está incluido en $\mathbf{D}^2$. Como Juan y María son amigos, $V_M(Ajm)=1$.

(ii) $V_M(\neg\phi)=1$ si y sólo si $V_M(\phi)=0$.

(iii) $V_M(\phi \wedge \psi)=1$ si y sólo si $V_M(\phi)=1$ y $V_M(\psi)=1$.

(iv) $V_M(\phi \vee \psi)=1$ si y sólo si $V_M(\phi)=1$ o $V_M(\psi)=1$.

(v) $V_M(\phi \rightarrow \psi)=1$ si y sólo si $V_M(\phi)=0$ o $V_M(\psi)=1$.

(vi) $V_M(\phi \leftrightarrow \psi)=1$ si y sólo si $V_M(\phi)=V_M(\psi)$.

(vii) $V_M(\forall x\phi)=1$ si y sólo si $V_M([c/x]\phi)=1$ para toda letra de individuo c de L.

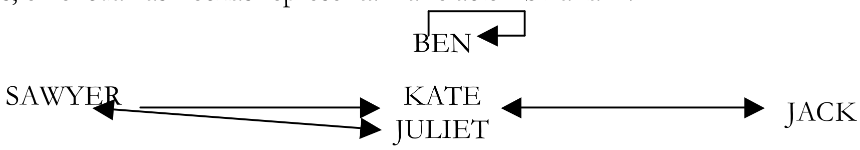
(viii) $V_M(\exists x\phi)=1$ si y sólo si $V_M([c/x]\phi)=1$ para al menos una letra de individuo c de L.

Si $V_M(\phi)=1$, entonces decimos que ϕ es **verdadera** en el modelo M (con esto último estamos diciendo que el hecho de que la función valuación relativa a un modelo asigne 1 a una fórmula significa que esa fórmula es verdadera en ese modelo).

Veamos qué sucede con nuestro ejemplo: consideremos la oración de L "$\exists x Cx$", que según nuestro diccionario intuitivamente significa que existe al menos una persona que es alumna de esta clase. Nuestro dominio es el conjunto de todas las personas. Si cada una de ellas tiene asignado un nombre entonces de acuerdo con la cláusula (viii) debemos ir reemplazando la x en Cx por cada uno de estos nombres hasta obtener una fórmula verdadera. Supongamos que $I(s)$=Santiago y que Santiago es alumno de esta clase, es decir, Santiago $\in I(C)$. Luego, cuando probemos con s, resultará Cs, que es verdadera pues $V_M(Cs)=1$ si y sólo si $I(s) \in I(C)$, por (i).

A este modo de presentar las cláusulas para definir verdad en un modelo se lo llama "**enfoque por sustitución**", ya que en las cláusulas para las cuantificadores, (vii) y (viii), es preciso sustituir la variable ligada por el cuantificador en cuestión por todas las letras de individuo del lenguaje. Este enfoque sólo funciona cuando todos los individuos del dominio tienen un nombre, esto es, tienen una letra de individuo que los representa. Supongamos que Pedro, en nuestro ejemplo, no tiene una letra de individuo que lo representa y es el único individuo en el dominio en medir exactamente 1, 884545… metros. Sea $I(M)= \{x \mid x$ mide 1, 884545… metros$\}$ y consideremos la oración de L "$\exists x Mx$". ¿Qué pasa de acuerdo con las cláusulas (i)-(viii) con la verdad de esta fórmula? ¿Qué valor de verdad debería tener esta fórmula intuitivamente?

EJEMPLO: queremos hablar del siguiente gráfico utilizando el lenguaje de la lógica de predicados, en el cual las flechas representan la relación binaria A.



Para eso necesitamos nombres para cada uno de sus individuos (b, j, h, k, s) y un nombre para la relación (A). Luego, es preciso interpretar estas letras, dar un modelo al lenguaje, que llamaremos M. Advertimos que todos los individuos son personajes de *Lost*. Por tanto, podemos establecer que, dado $M = \langle \mathbf{D}, I \rangle$, $\mathbf{D}=\{x \mid x$ es un personaje de *Lost*$\}$, I(b)=Ben; I(j)=Jack; I(h)=Juliet; I(k)=Kate; I(s)=Sawyer; y, por último $I(\mathrm{A})=\{\langle \mathrm{b, b}\rangle, \langle \mathrm{k, j}\rangle, \langle \mathrm{j, k}\rangle, \langle \mathrm{s, k}\rangle, \langle \mathrm{s, h}\rangle, \langle \mathrm{h, s}\rangle\}$.

Puesto que todos los individuos del dominio tienen nombre, podemos utilizar el enfoque por sustitución con tranquilidad. Sabemos pues que: $V_M(\mathrm{Akj})=1$, pues $\langle \mathrm{j, k}\rangle \in I(\mathrm{A})$; $V_M(\mathrm{Ash} \wedge \mathrm{Ahs})=1$, pues $V_M(\mathrm{Ash})=1$ y $V_M(\mathrm{Ahs})=1$, pues $\langle \mathrm{s, h}\rangle \in I(\mathrm{A})$ y $\langle \mathrm{h, s}\rangle \in I(\mathrm{A})$; $V_M(\forall x \mathrm{As}x)=0$ (Sawyer se relaciona con todos) pues para la letra de individuo b la fórmula $[\mathrm{b}/x]\mathrm{As}x$, esto es, Asb no es verdadera en M: $V_M(\mathrm{Asb})=0$; $V_M(\forall x \exists y \mathrm{A}xy)=1$ (para todo individuo hay un individuo que se relaciona con él) pues $V_M([\mathrm{c}/x]\forall x \exists y \mathrm{A}xy)=1$ para cada letra de individuo c: $V_M(\exists y \mathrm{Ab}y)=1$ (pues $V_M(\mathrm{Abb})=1$), $V_M(\exists y \mathrm{Aj}y)=1$ (pues $V_M(\mathrm{Ajk})=1$), $V_M(\exists y \mathrm{Ah}y)=1$ (pues $V_M(\mathrm{Ahs})=1$), $V_M(\exists y \mathrm{Ak}y)=1$ (pues $V_M(\mathrm{Akj})=1$) y $V_M(\exists y \mathrm{As}y)=1$ (pues $V_M(\mathrm{Ask})=1$).

Determine el valor de verdad de "$\exists y \forall x \mathrm{A}xy$" y de "$\forall x \exists y \mathrm{A}yx$" en M. Haga el ejercicio 7 del apartado 3.6.2.

Validez Universal y Consecuencia Lógica

Decimos que una formula ϕ de L es **universalmente (o lógicamente) válida** cuando $V_M(\phi)=1$ para todo modelo M, y lo escribimos "$\models \phi$". Notemos que recorrer todos los modelos, aún recorriendo únicamente los modelos relevantes para ϕ (es decir, interpretando únicamente las variables lógicas que aparecen en ϕ), es sustancialmente más complicado que hacer tablas de verdad. En lógica proposicional, recorrer todas las interpretaciones posibles para una fórmula era una tarea finita. Aquí, en cambio, aún dejando de lado la interpretación de las variables lógicas en ϕ, la tarea es infinita en grado máximo, ya que implica recorrer todos los dominios posibles, esto es, probar con todos los conjuntos existentes de acuerdo con la teoría tradicional de conjuntos, llamada ZFC.[3] Esta tarea es imposible. No obstante, no siempre será necesaria para determinar la validez universal de una fórmula de L: optaremos trabajar en un sistema de deducción natural, dejando los modelos de lado, ya que existe un teorema que afirma que toda fórmula derivable en aquel sistema es lógicamente válida. Si quisiéramos saber si una fórmula es lógicamente válida intentaríamos derivarla; de ser posible podríamos afirmar su validez universal.

Decimos que dos fórmulas ϕ y ψ de L son **lógicamente equivalentes** si tienen el mismo valor de verdad en todo modelo, si $V_M(\phi)=V_M(\psi)$ para todo modelo M.

Si $\phi_1,\ldots, \phi_n$ y ψ son fórmulas de L, decimos que un argumento cuyas premisas son $\phi_1,\ldots, \phi_n$ y su conclusión es ψ es **semántica o lógicamente válido**, o lo que es lo mismo, que ψ es una **consecuencia lógica** de son $\phi_1,\ldots, \phi_n$, si para todo modelo M tal que $V_M(\phi_1)=\ldots=V_M(\phi_n)=1$ también se cumple que $V_M(\psi)=1$, y lo notamos: "$\{\phi_1,\ldots, \phi_n\} \models \psi$". Luego, si un argumento es

[3] Por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel, sus creadores, y un axioma que se simboliza mediante la letra C.

lógicamente válido, será imposible encontrar un modelo que asigne 1 a las premisas (las premisas sean verdaderas) y 0 a la conclusión (la conclusión sea falsa).

Monotonía: si Γ y Δ son conjuntos de fórmulas de L y $\Gamma \models \psi$, entonces $\Gamma \cup \Delta \models \psi$.

Diremos que "$\models \psi$" es equivalente a "$\phi \models \psi$" (ϕ es el conjunto vacío). Luego, una fórmula lógicamente válida es aquella que se sigue del conjunto vacío, aquella para la cual no se necesitan premisas. Las razones para pensar de este modo la validez universal como un caso particular de consecuencia lógica yacen en la monotonía: intuitivamente vemos que las verdades lógicas se siguen del conjunto vacío porque se siguen de cualquier conjunto de fórmulas de L. De acuerdo con monotonía: si $\phi \models \psi$, entonces $\Gamma \cup \phi \models \psi$, entonces $\Gamma \models \psi$, pues $\Gamma \cup \phi = \Gamma$ (piense porqué). Por lo tanto, decimos que una fórmula lógicamente válida es aquella que es consecuencia lógica de cualquier conjunto de fórmulas de L, inclusive del conjunto vacío.

Graves problemas: como hemos visto, es sencillo utilizar nuestro enfoque por sustitución (cláusulas (vii) y (viii) de la definición de valuación basada en un modelo) para saber si un determinado modelo finito hace verdadera o no a una fórmula. Pero ¿qué pasa si nuestro modelo es infinito, esto es si el dominio del modelo tiene infinitos elementos? Sea $M = \langle \mathbb{N}, I \rangle$, donde $I(a_n)=n$. Aquí no habrá problemas para evaluar las fórmulas de acuerdo con nuestro enfoque porque notemos que todos los individuos del dominio tienen un nombre. De hecho, hay tantos nombres en L como números naturales: a_1, a_2,…, a_n,…. ¿Qué pasa entonces si tenemos un modelo cuyo dominio es más "grande" que el conjunto de los números naturales? El conjunto de los números reales lo es. ¿Cómo evaluar fórmulas universalmente cuantificadas si no tenemos nombres para todos los individuos del dominio? Esta es la razón por la cual el enfoque por sustitución no es suficiente. Para desarrollar demostraciones que impliquen "recorrer" todos los modelos, será preciso utilizar el enfoque por asignación visto en teóricos; tal es el caso de demostraciones acerca de la validez universal, la equivalencia y la consecuencia lógica. Acá no veremos ese enfoque y, por ende, nos limitaremos a hacer pruebas sintácticas.

EJERCICIO 2 (Gamut página 129, edición vieja)

a. $\exists x Ax, \exists x Bx \;/\; \exists x(Ax \wedge Bx)$

Sea $M = \langle \mathbf{D}, I \rangle$, donde $\mathbf{D}=\{x \mid x$ es alumno de esta clase$\}$, $I(A)=\{x \mid x$ es de River$\}$, $I(B)=\{x \mid x$ es de Boca$\}$. Luego, es cierto que $\exists x Ax$, es cierto que $\exists x Bx$, pero es falso que $\exists x(Ax \wedge Bx)$ porque nadie en esta clase es de Boca y de River al mismo tiempo.

i. $\forall x Rxx \;/\; \forall x \forall y Rxy$

Sea $M = \langle \mathbf{D}, I \rangle$, donde $\mathbf{D}=\{x \mid x$ un número natural$\}$, $I(R)=\{ \langle x, y \rangle \mid x$ es igual a $y\}$. Luego, es cierto que $\forall x Rxx$, pues todo es número es igual a sí mismo, pero $\forall x \forall y Rxy$ es falso, porque no todos son iguales con todos, $2 \neq 3$.

Si tiene tiempo, haga todo el ejercicio 2 excepto el inciso o) y los subsiguientes.