

Mares - Relevant Logic (Cap. 2)

Diego Tajer

15 de junio de 2010

1. Por qué semánticas veritativo-teoréticas

¿Por qué no nos detenemos en la manera en que en la sección 1 forzamos a las premisas a ser relevantes para la conclusión? En primer lugar, porque debemos entender el tratamiento de la conjunción, la disyunción y la negación. En segundo lugar, porque todavía no interpretamos bien de qué se trata una implicación. Sólo mostramos cómo probar que una implicación es verdadera, pero no sabemos qué significa bien eso. Existe la posibilidad de tomar una semántica inferencialista (p. ej. Brandom) y cambiar la noción de verdad por la de compromiso. De esta manera, $A \rightarrow B$ significa que el que cree A , está comprometido a creer B también (Lance, Kremer). Sin embargo, en este libro se tomará una semántica referencialista, por dos razones: (a) la semántica referencialista apela al sistema \mathbf{R} , mientras que la inferencialista apela a \mathbf{E} ; (b) el objetivo del libro no intenta cambiar tan radicalmente las posturas de los filósofos conservadores, sino mostrarles que con poco esfuerzo puede aceptarse la lógica relevante.

2. A partir de Tarski

La historia moderna de la semántica veritativo-teorética empieza con Tarski (1932). Las modernizaciones del texto de 1932 hacen a la verdad relativa a un modelo. Un modelo es una estructura matemática, como esta: 1. El modelo M contiene un conjunto de individuos, I , llamado 'dominio', y una función, v , llamada 'asignación de valores'. La asignación de valores es una función a partir de las constantes individuales hacia los individuos (elementos de I). El modelo M es el par $\langle I, v \rangle$, en el cual I es un conjunto de individuos y v es una asignación de valores. Así,

- Donde P es un predicado n -ádico y c_1, \dots, c_n son constantes individuales, $P(c_1, \dots, c_n)$ es verdadero en M si y sólo si $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle$ está en $v(P)$.
- Donde A y B son fórmulas del lenguaje, $(A \wedge B)$ es verdadero en M si y sólo si tanto A como B son verdaderos en M .
- Donde A y B son fórmulas del lenguaje, $(A \vee B)$ es verdadero en M si y sólo si al menos uno entre A o B es verdadero en M .
- Donde A es una fórmula del lenguaje, $\neg A$ es verdadero en M si y sólo si A no es verdadero en M .

Alrededor de la teoría de Tarski, se desarrolló una filosofía del lenguaje muy fuerte. Esta filosofía sostiene que uno entiende lo que una oración significa si y sólo si uno entiende lo que la haría verdadera (es decir, sus condiciones de verdad).

3. Hasta los mundos posibles

C.I. Lewis propuso su lógica de implicación estricta como la que captura el significado intuitivo de 'implicación'. Pero esta semántica no captura la noción de relevancia, y por eso necesitamos una más complicada. Una *Lógica Modal* es una lógica que contiene los símbolos \Box ('es necesario que') y \Diamond ('es posible que'). Una *lógica modal clásica* es una lógica que contiene el esquema $\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$, y está cerrada bajo la siguiente regla: Si $A \equiv B$ es un teorema de la lógica, también lo es $\Box A \equiv \Box B$. Una *lógica modal regular* es una lógica que incluye Def \Diamond y está cerrada bajo la regla: Si $A \supset B$ es un teorema de la lógica, también lo es $\Box A \supset \Box B$. Una *lógica modal normal* es una lógica que es regular y está cerrada bajo la regla: Si A es teorema de la lógica, también lo es $\Box A$.

La semántica comienza con un conjunto de índices llamados 'mundos posibles'. Un mundo posible es un universo completo. En la semántica de mundos posibles, la verdad está relativizada a mundos. Entonces, en vez de hablar acerca de la verdad o falsedad de una fórmula en un modelo, hablamos sobre la verdad o falsedad de la fórmula en un mundo particular en un modelo. La noción relativizada de la verdad o falsedad de una fórmula se usa para proveer condiciones de verdad a los operadores modales:

$\Box A$ es verdadero en el mundo w en un modelo M si y sólo si para cada mundo w' tal que w' es accesible desde w , A es verdadero en w'

$\Diamond A$ es verdadero en el mundo w en el modelo M si y sólo si hay algún mundo w' tal que w' es accesible desde w y A es verdadero en w'

Hay muchas virtudes en la semántica modal. En primer lugar, la semántica es desarrollada dentro del lenguaje de la teoría de conjuntos. Hablamos de conjuntos de mundos y de relaciones entre esos mundos. Como el lenguaje de la teoría de conjuntos es extensional, eso nos ayuda a entender matemáticamente la modalidad. En segundo lugar, la traducción de la lógica modal en semántica de mundos posibles dio a la lógica modal una semántica composicional. En tercer lugar, la semántica de mundos posibles proveyó una interpretación intuitiva y filosóficamente satisfactoria de la modalidad. Finalmente, la semántica modal puede usarse para tratar otros elementos del lenguaje, como los operadores temporales.

4. Semántica de vecindad

La semántica de vecindad es un estilo de semántica de mundos posible. Se trata de una lógica no regular, que no nos permite pasar de $A \supset B$ a $\Box A \supset \Box B$. Se empieza con una relación N entre mundos y conjuntos de mundos. Si X es un conjunto de mundos y NwX , X es la 'vecindad de w '. La condición de verdad para la necesidad en esta semántica se da en términos de vecindades. Un conjunto veritativo para una fórmula ' A ' es el conjunto de mundos en los cuales ' A ' es verdadera. Representamos el conjunto veritativo de ' A ' por medio de ' $|A|$ '. Entonces, ' $\Box A$ ' es verdadero en w si y sólo si $Nw|A|$.

Así podemos ver cómo esta semántica no es la de una lógica modal normal. Supongamos que ' $A \supset B$ ' es una fórmula válida y que $Nw|A|$. Entonces, ' $\Box A$ ' se da en w . Pero no ha nada en esta semántica que implique $Nw|B|$, por lo cual digamos que eso es falso. Entonces, ' $\Box B$ ' no es verdadero en w . Así, ' $\Box A \supset \Box B$ ' es falso en w y no es válido.

5. Modelando la irrelevancia

Supongamos que tenemos la idea de que la implicación es veritativo-funcional (función que va desde un conjunto de valores de verdad hasta un valor de verdad). En tablas de verdad, nos quedaría la tabla de la implicación material, que nos lleva a paradojas.

Podríamos pasar, entonces, a la implicación estricta, que se basa en la semántica de mundos posibles.

' $A \rightarrow B$ ' es verdadero en un mundo w si y sólo si para cada mundo w' tal que w' es accesible desde w , o bien ' A ' o es falso en w' o bien ' B ' es verdadero en w' . Esta condición de verdad dice que una implicación es

verdadera en un mundo si y sólo si la implicación material correspondiente es verdadera en todo mundo accesible.

Esto nos ayuda a evitar paradojas como ' $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ ', pero tenemos otras paradojas, como ' $p \rightarrow (q \rightarrow q)$ '. Esta lógica, por lo tanto, es también irrelevante.

6. Modelando la relevancia

Para modelar la relevancia, se reemplaza la relación binaria de accesibilidad por una relación ternaria llamada R . En vez de hablar de mundos posibles, hablaremos de 'situaciones'. Las situaciones, a diferencia de los mundos posibles, pueden ser incompletas (es decir, no decidir todo asunto) y también inconsistentes.

Condiciones de Verdad de Routley y Meyer para el condicional ' $A \rightarrow B$ '
es verdadera en una situación s si y sólo si para todas las situaciones x e y , si $Rsxy$ y ' A ' es verdadero en x , entonces ' B ' es verdadero en y .

Esta semántica para la lógica relevante tiene las virtudes de la implicación estricta: es composicional y extensional.

7. ¿Qué pasa con las fórmulas válidas?

En la semántica de mundos posibles para la lógica modal normal, una fórmula es válida en un modelo si y sólo si es verdadera en todo mundo posible en ese modelo. Pero esto no puede funcionar en la semántica de Routley y Meyer. Aquí, para cualquier fórmula, habrá modelos que contengan mundos donde esas fórmulas no se dan. Así, si adoptamos el criterio tradicional, no habría fórmulas válidas. Ante todo, sin embargo, no importan tanto las *fórmulas* válidas, pues la lógica se ocupa centralmente de las *inferencias* válidas.

Los teoremas de la lógica relevante son, sintácticamente hablando, las fórmulas que puedo probar bajo el subíndice nulo. Semánticamente hablando, una fórmula es *válida en un modelo* si y sólo si es verdadera en toda situación lógica del modelo.

Una deducción de una premisa (como ' A entonces B ') es válida en un modelo si y sólo si para cada situación [lógica?] s en M , si A es verdadera en s de acuerdo a M , entonces B es también verdadera en s de acuerdo a M (la metateoría es clásica).

Las situaciones lógicas están fuertemente relacionadas con las deducciones válidas. Esta relación es capturada por el teorema de entailment semántico:

Teorema 1 (Entailment Semántico) Si la deducción desde A hasta B es válida en M , entonces ' $A \rightarrow B$ ' es una fórmula válida en M .

Si una fórmula es válida en todo modelo, decimos que es válida a secas. Asimismo, si una deducción es válida en todo modelo, entonces la implicación es también válida en todo modelo. La relación entre deducciones e implicaciones es la versión semántica de lo que suele llamarse Teorema de la Deducción.

8. Persistencia

Para probar el teorema de entailment semántico, tenemos que entender primero la noción de *persistencia*. Se trata de una relación binaria entre situaciones, que se escribe ' \trianglelefteq '. Para cualesquiera situaciones s y t , si $s \trianglelefteq t$, decimos que t *extiende* s . La relación de persistencia es reflexiva, transitiva y anti-simétrica.

Para cualesquiera situaciones t y u ,

Relación de persistencia $t \trianglelefteq u$ si y sólo si hay una situación lógica tal que $Rstu$.

Para obtener el lema de persistencia obtenido recién, necesitamos dos requerimientos sobre la relación de accesibilidad. En primer lugar, debe ser tal que si $s' \trianglelefteq s$ y $Rstu$, entonces $Rs'tu$. En segundo lugar, para cualquier variable proposicional p , si p es verdadera de acuerdo a la asignación v en s y $s \trianglelefteq t$, entonces p también es verdadera en t de acuerdo a v . Así podemos probar el lema de persistencia:

Lema de persistencia Para cualquier fórmula ' A ', asignación de valor v , y situaciones s y t , si ' A ' es verdadero en s de acuerdo a v y $s \trianglelefteq t$, entonces ' A ' es verdadero en t de acuerdo a v .

Así podemos probar el teorema de entailment semántico.

1. Para cualquier situación t y fórmulas ' A ' y ' B ', si ' A ' es verdadero en t de acuerdo a v , entonces ' B ' es verdadero en t de acuerdo a v . [Supuesto - Hipótesis]
2. Sea s una situación lógica arbitraria. [Supuesto]

3. Tome dos situaciones arbitrarias t y u tales que $Rstu$. [Supuesto]
4. Por la definición de persistencia, $t \leq u$.
5. ' A ' es verdadero en t de acuerdo a v [Supuesto].
6. ' A ' es verdadero en u de acuerdo a v . [5, y lema de persistencia]
7. ' B ' es verdadero en u de acuerdo a v . [2,6]
8. Si ' A ' es verdadero en t de acuerdo a v , entonces ' B ' es verdadero en u de acuerdo a v . [\supset Intro 5-7]
9. Para cualesquiera situaciones t y u tales que $Rstu$, Si ' A ' es verdadero en t de acuerdo a v , entonces ' B ' es verdadero en u de acuerdo a v . [Generalización Universal 3-8]
10. ' $A \rightarrow B$ ' es verdadero en s de acuerdo a v . [Definición de \rightarrow , 9]
11. ' $A \rightarrow B$ ' es verdadera en toda situación lógica s . [Generalización Universal 2-10]
12. ' $A \rightarrow B$ ' es válida en el modelo. [Definición de validez en un modelo, 11]
13. Si la deducción a partir de ' A ' hacia ' B ' es válida en un modelo, entonces ' $A \rightarrow B$ ' también es válida en el modelo. [\supset Intro 1-12]

9. Modelizando la inferencia

Tenemos una relación ternaria de accesibilidad entre situaciones. Sin embargo, podemos construir relaciones de mayor aridad que 3 usando esta relación ternaria.

R^0st si y sólo si $s \leq t$;

R^1stu si y sólo si $Rstu$;

$R^{n+1}s_1 \dots s_{n+2}t$ si y sólo si $\exists x (R^n s_1 \dots s_{n+1} \wedge Rxs_{n+2}t)$

para todo $n \geq 2$. Entonces, por ejemplo,

R^2stuv si y sólo si $\exists x (Rstx \wedge Rxuv)$

y

R^3stuvw si y sólo si $\exists x (R^2stux \wedge Rxvw)$, donde $R^2stux \wedge Rxvw$ puede simplificarse a $\exists x \exists y (Rsty \wedge Ryux \wedge Rxvw)$.

Inferencia válida Una inferencia a partir de las premisas A_1, \dots, A_n hasta la conclusión B es *relevantemente válida* en un modelo M si y sólo si para toda situación s_1, \dots, s_n si para cada i tal que $1 \leq i \leq n$, A_i es verdadero en s_i en M entonces, para cada situación t tal que $R^{s_1 \dots s_n} t$, B es verdadero en t en M .

En términos de deducción natural, podemos pensar en los subíndices como referidos a situaciones. La estructura ' $A'_{\{1\}}$ ' nos dice que hay una situación (llamada s_1) en donde la fórmula ' A ' es verdadera. El subíndice ' $\{1,2\}$ ', en cambio, se refiere a una situación arbitraria t tal que $R_{s_1 s_2} t$. Etc. Similarmente, el subíndice ' $\{1,2,3\}$ ' se refiere a una situación arbitraria t tal que $R^2_{s_1 s_2 s_3} t$. Y así sucesivamente.

10. Conjunción y disyunción

- Condiciones de verdad para \wedge y \vee

' $A \wedge B$ ' es verdadero en s si y sólo si ' A ' es verdadero en s y ' B ' es verdadero en s .

' $A \vee B$ ' es verdadero en s si y sólo si ' A ' es verdadero en s o ' B ' es verdadero en s .

- Reglas de deducción natural para \wedge y \vee

\wedge I A partir de A_α y B_β inferir $A \wedge B$

\wedge E A partir de $A \wedge B_\alpha$ inferir A_α o B_α .

Brady \vee E A partir de $A \vee B_\alpha$ inferir A_α, B_α . Esto introduce dos líneas de prueba. Si ambas prueban lo mismo, podemos unificarlas (ver pag. 34).

11. Requisitos en la relación de accesibilidad

1. Interpretamos el subíndice ' $\{1,2\}$ ' usado en nuestro sistema de deducción natural como representando una situación arbitraria t tal que $R_{s_1 s_2} t$, y así para todos los números mayores que 2.
2. El orden en que la información está presentada en la deducción no es crucial. Necesitamos que $\{1,2\}$ y $\{2,1\}$ coincidan. Así, decimos que, si $R_{s_1 s_2} t$, entonces $R_{s_2 s_1} t$. Y así en general: podemos permutar cualesquiera dos situaciones excepto la última, que permanece fija. [Intercambio]

3. Para cualquier situación s , $Rsss$. [Reflexividad Completa]
4. Podemos usar la información en una situación tantas veces como lo queramos en una deducción. Esto significa que si la relación $R...s...t$ se da en un modelo, entonces la relación $R...ss...t$ también se da. [Repetición]

12. La lógica R^+ (fragmento de R sin negación)

En esta lógica, R satisface Intercambio, Repetición, Reflexividad Completa y las restricciones sobre \trianglelefteq antes mencionadas. Un modelo positivo relacional es una cuadrupla $\langle sit, logical, R, v \rangle$ tal que sit es un conjunto no vacío de situaciones, $logical$ (el conjunto de situaciones lógicas) es un subconjunto no vacío de sit y v es una función que asigna conjuntos de situaciones a las variables proposicionales. $s \in v(p)$ puede leerse como p es verdadero en s de acuerdo a v . Por persistencia, si $s \in v(p)$ y $s \trianglelefteq t$, entonces $s \in v(p)$.

Las cláusulas de verdad para las fórmulas son cuatro:

1. $s \vDash_v p$ si y sólo si $s \in v(p)$
2. $s \vDash_v A \wedge B$ si y sólo si $s \vDash_v A$ y $s \vDash_v B$;
3. $s \vDash_v A \vee B$ si y sólo si $s \vDash_v A$ o $s \vDash_v B$;
4. $s \vDash_v A \rightarrow B$ si y sólo si $\forall x \forall y ((R_sxy \wedge x \vDash_v A \supset y \vDash_v B)$.